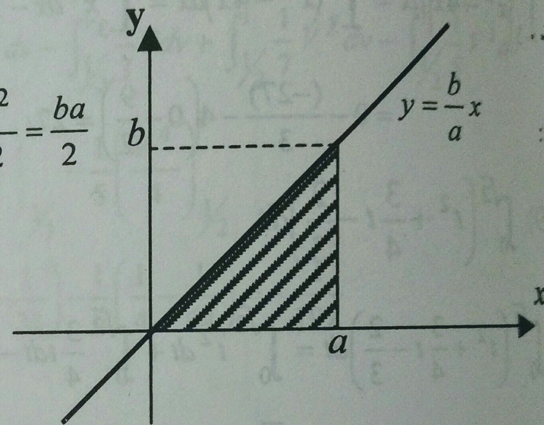
1) **چرا تابع $\sin x$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[a\ ,\ b]$ انتگرالپذیر است ؟**

حل : $\sin x$ بر بازه $[a\ ,\ b]$ پیوسته است . $\Rightarrow$ انتگرال پذیر است

2) **چرا تابع $\cos x$ بر هر بازهٔ بسته $[a\ ,\ b]$ که شامل نقاط $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$ نیست انتگرال پذیر است ؟**

حل : چون بر این بازه پیوسته است

3) **مساحت A تحت خط $y=\left(\frac{b}{a}\right)x$ از $x=0$ تا $x=a$ را یافته ، و نتیجه را تعبیر هندسی کنید .**



حل :

$$\int_0^a \frac{b}{a}x\,dx=\frac{b}{a}\int_0^a x\,dx=\frac{b}{a}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a=\frac{b}{a}\times\frac{a^2}{2}=\frac{ba}{2}$$

$$A=\frac{1}{2}ab$$

❖ **انتگرالهای زیر را به کمک فرمولهای (۹) و (۱۲) حساب کنید .**

4) $\int_1^2 2x^3 dx$

حل :

$$\int_1^2 2x^3 dx=2\int_1^2 x^3 dx=2\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=2\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{2}$$

5) $\int_{-1}^0 \frac{1}{2}x^4 dx$

حل :

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{2}x^4 dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \ dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^0=\frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{1}{10}$$

6) $\int_0^1 8x^7 dx$

حل :

$$\int_0^1 8x^7 dx=8\int_0^1 x^7 dx=8\left[\frac{x^8}{8}\right]_0^1=1$$

7) $\int_2^3 \left|x^2-4x\right| dx$

حل : همواره در ناحیه $(2,3)$ علامت قدر مطالق منفی است

$$\Rightarrow \int_2^3 -\left(x^2-4x\right)dx = \int_2^3 \left(-x^2+4x\right)dx = \int_2^3 -x^2\,dx = \int_2^3 -x^2\,dx = 4\int_2^3 x\,dx$$

$$=\left(\frac{-x^3}{3}\right)_2^3 + 4\left(\frac{x^2}{2}\right)_2^3 = -\frac{27}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) + 4\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right) = \frac{11}{3}$$

8) $\int_{-3}^{0}\left|x^2-4x\right|dx$

حل : در ناحیه $(-3\ ,\ 0)$ هواره علامت داخل قدر مطلق مثبت می باشد .

$$\int_{-3}^{0}\left|x^2-4x\right|dx = \int_{-3}^{0}\left(x^2-4x\right)dx = \int_{-3}^{0}x^2\,dx - \int_{-3}^{0}4x\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{0} - 4\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-3}^{0}$$

$$=0-\frac{(-27)}{3} - 4\left(0-\frac{9}{2}\right) = 27$$

9) $\int_0^{\sqrt{2}}\left(t^2+\frac{3}{4}t-\frac{2}{3}\right)dt$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\left(t^2+\frac{3}{4}t-\frac{2}{3}\right)dt = \int_0^{\sqrt{2}} t^2\,dt + \int_0^{\sqrt{2}}\frac{3}{4}t\,dt - \int_0^{\sqrt{2}}\frac{2}{3}\,dt == \left(\frac{t^3}{3}\right)_0^{\sqrt{2}} + \frac{3}{4}\left(\frac{t^2}{2}\right)_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}(t)_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-0\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{2}{2}-0\right) - \frac{2}{3}(\sqrt{2}-0) = \frac{3}{4}$$

10) $\int_{-2}^{1}(t^3-t^2+t-1)dt$

حل: $\int_{-2}^{1}(t^3-t^2+t-1)dt = \int_{-2}^{1}t^3\,dt - \int_{-2}^{1}t^2\,dt + \int_{-2}^{1}t\,dt - \int_{-2}^{1}dt$

$$=\left(\frac{t^4}{4}\right)_{-2}^{1} - \left(\frac{t^3}{3}\right)_{-2}^{1} + \left(\frac{t^2}{2}\right)_{-2}^{1} - (t)_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4}-4\right) - \left(\frac{1}{3}-(-\frac{8}{3})\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right) - (1-(-2)) = -\frac{45}{4}$$

11) $\int_{-1}^{1}(3u^5-5u^3)du$

حل: $\int_{-1}^{1}(3u^5-5u^3)du = 3\int_{-1}^{1}u^5\,du - 5\int_{-1}^{1}u^3 = 3\left[\frac{u^6}{6}\right]_{-1}^{1} - 5\left[\frac{u^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = 0$

12) $\int_0^1(2u^{99}-u^{49}+\pi)du$

حل: $\int_0^1(2u^{99}-u^{49}+\pi)du = \int_0^1 2u^{99}\,du - \int_0^1 u^{49}\,du + \int_0^1 \pi\,du = \left(\frac{u^{100}}{100}\right)_0^1 - \left(\frac{u^{50}}{50}\right)_0^1 + \pi(u)_0^1$

$$=2\left(\frac{1}{100}-0\right) - \left(\frac{1}{50}-0\right) + \pi(1-0) = \pi$$

13) $\int_0^{\sqrt{3}} (\frac{1}{9}V - \frac{1}{27}V^3)dv$

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}V - \frac{1}{27}V^3\right)dv = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{9}vdv - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{27}v^3 dv = \frac{1}{27}V^3 dv = \frac{1}{9}\left(\frac{V^2}{2}\right)_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{27}\left(\frac{V^4}{4}\right)_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2} - 0\right) - \frac{1}{27}\left(\frac{9}{4} - 0\right) = \frac{1}{12}$$

14) $\int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}V + \frac{1}{7}V^2 - \frac{1}{5}V^3\right)dv$

حل:

$$\int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}V + \frac{1}{7}V^2 - \frac{1}{5}V^3\right)dv = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{4}dv - \int_{1/2}^{1} \frac{1}{3}Vdv + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{7}V^2 dv - \int_{1/2}^{1} \frac{1}{5}V^3 dv$$

$$= \frac{1}{4}(V)_{1/2}^{1} - \frac{1}{3}\left(\frac{V^2}{2}\right)_{1/2}^{1} + \frac{1}{7}\left(\frac{V^3}{3}\right)_{1/2}^{1} - \frac{1}{5}\left(\frac{V^4}{4}\right)_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{64}\right) = -\frac{1}{192}$$

15) $\int_4^5 (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx$

$$\int_4^5 (x-1)dx = \int_4^5 xdx - \int_4^5 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_4^5 - (x)_4^5 = \left(\frac{25}{2} - \frac{16}{2}\right) - (5-4) = \frac{7}{2}$$

16) $\int_{-4}^{6} (x-1)(x^2+x+1)dx$

حل:

$$\int_{-4}^{6} (x-1)(x^2+x+1)dx = \int_{-4}^{6} (x^3-1)dx = \int_{-4}^{6} x^3 dx - \int_{-4}^{6} dx = \left(\frac{x^4}{4}\right)_{-4}^{6} - (x)_{-4}^{6}$$

$$= \left(\frac{1296}{4} - \frac{256}{4}\right) - (6-(-4)) = 250$$

17) $\int_2^8 \frac{x^3-1}{x-1}dx$

حل:

$$\int_2^8 \frac{x^3-1}{x-1}dx = \int_2^8 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}dx = \int_2^8 (x^2+x+1)dx = \int_2^8 x^2 dx + \int_2^8 xdx + \int_2^8 dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)_2^8 + \left(\frac{x^2}{2}\right)_2^8 + (x)_2^8 = \left(\frac{512}{3} - \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{64}{2} - \frac{4}{2}\right) + (8-2) = 204$$

18) $\int_{-1}^{2}\frac{x^3+8}{x+2}dx$

حل:

$$\int_{-1}^{2}\frac{x^3+8}{x+2}dx=\int_{-1}^{2}\frac{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}{(x+2)}dx$$

$$\int_{-1}^{2}\left(x^2-2x+4\right)dx=\int_{-1}^{2}x^2dx-\int_{-1}^{2}2xdx+\int_{-1}^{2}4dx=\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{2}-2\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{2}+4(x)_{-1}^{2}$$

$$=\left(\frac{8}{3}-(-\frac{1}{3})\right)-2\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)+4(2-(-1))=12$$

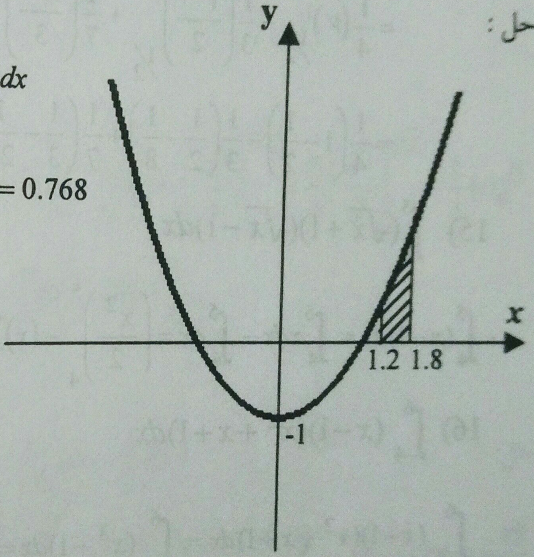
❖ مساحت A ناحیه R زیر را بیابید.

19) تحت منحنی $y=x^2-1$ از $x=1.2$ تا $x=1.8$.

حل:

$$A=\int_{1.2}^{1.8}\left(x^2-1\right)dx=\int_{1.2}^{1.8}x^2\,dx-\int_{1.2}^{1.8}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1.2}^{1.8}-(x)_{1.2}^{1.8}=0.768$$



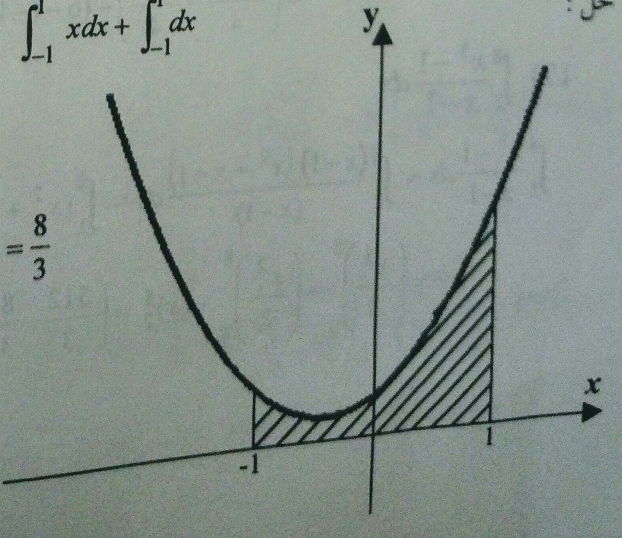
20) تحت منحنی $y=x^2+x+1$ از $x=-1$ تا $x=1$.

حل:

$$A=\int_{-1}^{1}(x^2+x+1)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}xdx+\int_{-1}^{1}dx$$

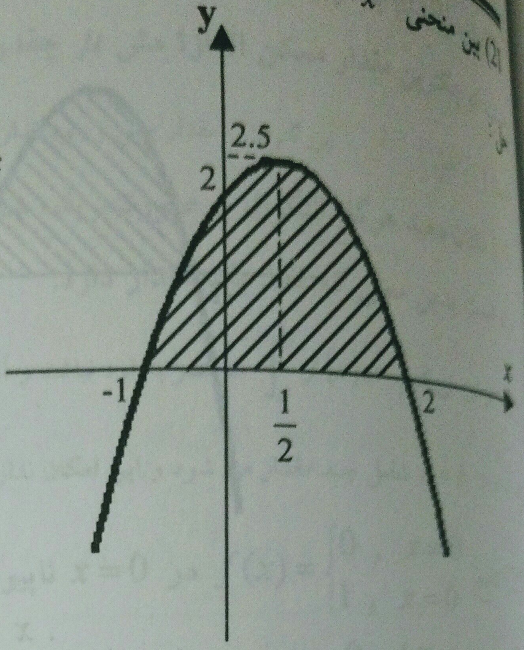
$$=\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{1}+(x)_{-1}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+(1-(-1))=\frac{8}{3}$$



21) بین منحنی $y=2+x-x^2$ و محور x .

حل:



$$A=\int_{-2}^{1}\left(2+x-x^2\right)dx$$

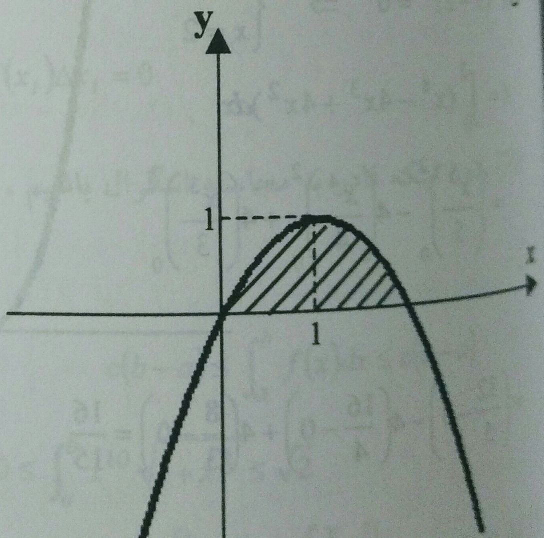
$$=\int_{-2}^{1}2\,dx+\int_{-2}^{1}x\,dx-\int_{-2}^{1}x^2\,dx$$

$$=(2x)_{-2}^{+1}+\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-2}^{+1}-\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-2}^{+1}-\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-2}^{+1}$$

$$=(2-(-4))=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)=\frac{3}{2}$$

22) بین منحنی $y=2x-x^2$ و محور x .

حل:



$$A=\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx$$

$$=\int_{0}^{2}2x\,dx-\int_{0}^{2}x^2\,dx$$

$$=\left(x^2\right)_0^2-\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2=(4-0)-\left(\frac{8}{3}-0\right)=\frac{4}{3}$$

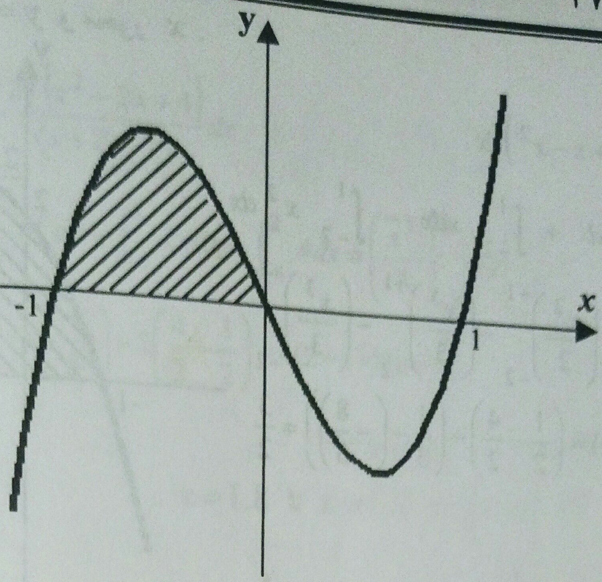
23) تحت منحنی $y=2x^3-2x$ از $x=-1$ تا $x=0$.

حل:

$$A=\int_{-1}^{0}(2x^3-2x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}2x^3\,dx-\int_{-1}^{0}2x\,dx$$

$$=\left(\frac{2x^4}{4}\right)_{-1}^{0}-\left(x^2\right)_{-1}^{0}=(0-\frac{2}{4})-(0-1)=\frac{1}{2}$$



24) بین منحنی $y=x^4-4x^3+4x^2$ و محور x .

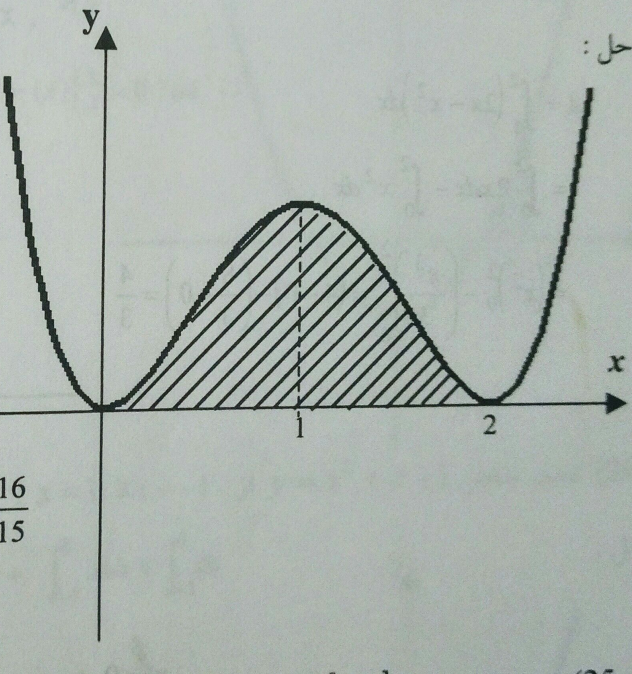
حل :

$$y=x^4-4x^3+4x=0$$

$$x^2(x-2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$A=\int_0^2 (x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}\right)_0^2-4\left(\frac{x^4}{4}\right)_0^2+4\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2$$



$$=\left(\frac{32}{5}-0\right)-4\left(\frac{16}{4}-0\right)+4\left(\frac{8}{3}-0\right)=\frac{16}{15}$$

25) فرض کنید بازهٔ $[a,b]$ به وسیلهٔ افراز $a=x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n=b$ به اندازهٔ مش μ به n به زیر بازهٔ $[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},b]$ تقسیم شده باشد . کوچکترین مقدار ممکن n به ازای اندازهٔ مش معلوم μ چیست ؟ نشان دهید که وقتی $\mu \to 0$ ، این کوچکترین مقدار به بینهایت نزدیک می شود .

حل :

$$\text{کوچکترین افراز}=\lim_{\mu\to 0}\frac{b-a}{\mu}=\infty$$

26) بازهٔ $[0,10]$ با افرازی به اندازهٔ مش $\sqrt{2}$ به n زیربازه تقسیم شده است . کوچکترین مقدار ممکن n چقدر است ؟

حل :

$$\text{کوچکترین بازه}=\frac{b-a}{\mu}=\frac{10-0}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$$

27) بازه $[0,10]$ با افراز $0=x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots x_{99},x_{100}=10$ به 100 زیر بازه تقسیم شده است. کوچکترین مقدار ممکن اندازهٔ مش μ چقدر است؟ بزرگترین مقدار ممکن μ چقدر است؟

حل : کوچکترین اندازه $=\mu=\dfrac{1}{10}$ بزرگترین مقدار مش وجود ندارد

28) نشان دهید هرگاه انتگرال به صورتتعریف شده در صفحه ۳۷۰ موجود باشد ، آنگاه منحصر بفرد است بدین معنی که فقط یک مقدار دارد.

حل : فرض می کنیم $\int_a^b f(x)dx$ منحصر به فرد نباشد و آنگاه طبق تعبیر هندسی مساحت تحت منحنی $f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ شامل چند مقدار می شود و این امکان ندارد سپس $\int_a^b f(x)\,dx$ منحصر به فرد است .

29) تابع $f(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\neq 0\\ 1\ ,\ x=0\end{cases}$ در $x=0$ ناپیوسته بوده ، ودرنتیجه ،بر هیچ بازه ای چون $[a,b]$ شامل نقطه $x=0$ پیوسته نمی باشد. نشان دهید بات این حال f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر با انتگرالی مساوی 0 میباشد.حل :

$$\int_a^b f(x)dx \xrightarrow{\text{اگر } x\neq 0} \int_a^b 0\times dx=0$$

اگر $x=0$ باشد $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=\lim_{\mu\to 0}\sum_{n=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=0$

30) بدون اینکه قادر به محاسبه انتگرال باشیم ، از کجا بدانیم که : $0\le\int_0^1 x^{10}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 2$

حل :

$f(x)=x^{10}\sqrt{1+x^2}$

$[0\ ,\ 1]\ \to \begin{cases}x=0\ \Rightarrow\ f(x)=0=c\\ x=1\ \Rightarrow\ f(x)=\sqrt{2}=c\end{cases}$ $\qquad c(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le c(b-a)$

$0(1-0)\le\int_a^b x^{10}\sqrt{1+x^2}\le\sqrt{2}(1-0)\ \Rightarrow\ 0\le\int_a^b x^{10}\sqrt{1+x^2}\le\sqrt{2}$

31) فرض کنید $f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویاست}\\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ است}\end{cases}$ نشان دهید f برهر بازهٔ $[a,b]$ انتگرال ناپذیر است.

حل : طبق مسأله ٦٤ صفحه ١٦٤ تابع $f(x)=\begin{cases}1 & \text{اگر } x \text{ گویاست}\\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ است}\end{cases}$ در هیچ نقطه ای حد ندارد و در هر بازهٔ $[a,b]$ ناپیوسته بوده پس انتگرال ناپذیر است .

32) تابعی مثال بزنید که بر بازهٔ $[a,b]$ کراندار بوده ولی انتگرال پذیر نباشد. حل : $\sin x^2$

33) ثابت کنید که اگر f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه f بر $[a,b]$ کراندار است.

حل: اثبات به برهان خلف: فرض کنیم f بر $[a,b]$ کراندار نباشد بنابراین:

$\forall\ n\in N\quad \exists\quad x_n\ \in\ [a,b]\quad S.t.\quad f_n(x)>n^2$

$$h_1=\frac{x_n-a}{n} \quad , \quad h_2=\frac{b-x_n}{n}$$

حال فرض کنیم n دلخواه باشد:

و افراز زیر را روی $[a,b]$ در نظر می گیریم.

$$\{x_0=a, x_1=a+h_1, \cdots, x_i=a+ih_1, \cdots, x_n, x_{n+1}=x_n+h_2, \cdots, x_{n+i}=x_n+ih_2, \cdots, x_{n'}=b\}$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n'} f(x_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\overset{h_1}{\overbrace{\Delta x_i}}+\sum_{i=n+1}^{n'} f(x_i)\overset{h_2}{\overbrace{\Delta' x_i}}\right)$$

چون $\int_a^b f(x)dx$ موجود است پس حد فوق وجود دارد.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i+\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{n'} f(x_i)\Delta' x_i$$

$$=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{n'} f(x_i)\Delta' x_i}_{\int_a^b f(x)dx}+\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n$$

$$: \int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n=0$$

ولی با توجه به فرض خلف داریم : $f(x_n)\geq n^2$ در نتیجه : $f(x_n)\Delta x_n \geq n^2.\dfrac{x_n-a}{n}=(x_n-a)n$

لذا $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n \geq \lim_{n\to\infty}(x_n-a)n=\infty$ یعنی $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n=\infty$ و این یک متناقض است با اینکه $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Delta x_n=0$ پس فرض خلف باطل و f کراندار است.

34) فرض کنید $f(x)=\sin x^2$ $\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & , \ x\neq 0\\ 0 \ , & x=0\end{cases}$ آیا f بر $[-1,1]$ انتگرال پذیر است؟

حل : تابع در این بازه ناپیوسته بوده پس انتگرال پذیر نمی باشد .

35) نشان دهید هر گاه f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$ این مشابه نامساوی مثلثی مجموعها برای انتگرالها می باشد. حل : $-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$

داریم : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$$-\int_a^c |f(x)|dx\leq\int_a^c f(x)dx\leq\int_a^c |f(x)|dx \qquad (1)$$

$$-\int_c^b |f(x)|dx\leq\int_c^b f(x)dx\leq\int_c^b |f(x)|dx \qquad (2)$$

$$(1)+(2)\Rightarrow -\left[\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)dx|\right]\leq\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\leq\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b \|f(x)\|dx$$

$$\Rightarrow -\int_a^b |f(x)|dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$$

۱) بنابر فرمول (۹)، صفحه ۳۷۵، $(n=1,2,\cdots)$ $\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$ که در آن تلویحاً فرض شده است که $a<b$. نشان دهید که فرمول به ازای $a>b$ برقرار می ماند؟

حل:

$$\text{اگر } a>b \Rightarrow \int_a^b x^n dx = -\int_b^a x^n dx = -\left[\frac{1}{n+1}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)\right] = \frac{1}{n+1}\left(-a^{n+1}+b^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

❖ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

2) $\int_{11}^{7} x dx$

حل:

$$\int_{11}^{7} x dx = -\int_{7}^{11} x dx = -\left(\frac{x^2}{2}\right)_7^{11} = \left(-\frac{11^2}{2} - \frac{-49}{2}\right) = -36$$

3) $\int_{1}^{-1}\left(x^2-x\right)dx$

حل:

$$\int_{1}^{-1}\left(x^2-x\right)dx = -\int_{-1}^{1}\left(x^2-x\right)dx = \int_{-1}^{1} x dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{1} - \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}-\left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \frac{-2}{3}$$

4) $\int_{-2}^{2} |x+1| dx$

حل:

$$\int_{-2}^{2} |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^{2} |x+1| dx = \int_{-2}^{-1}(-x-1)dx + \int_{-1}^{2}(x+1)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} -x dx - \int_{-2}^{-1} dx + \int_{-1}^{2} x dx + \int_{-1}^{2} dx = \left(-\frac{x^2}{2}\right)_{-2}^{-1} - (x)_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{2} + (x)_{-1}^{2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{2}\right)\right) - (-1-(-2)) + \left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right) + (2-(-1)) = 5$$

5) $\int_{-1}^{3} \left|x^2-2x\right| dx$

حل:

$$\int_{-1}^{3}\left|x^2-2x\right| dx = \int_{-1}^{2}\left|x^2-2x\right| dx + \int_{2}^{3}\left|x^2-2x\right| dx = \int_{-1}^{2} -\left(x^2-2x\right)dx + \int_{2}^{3}\left(x^2-2x\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -x^2 dx - \int_{-1}^{2} 2x dx + \int_{2}^{3} x^2 dx - \int_{2}^{3} 2x dx = \left(-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{2} - \left(x^2\right)_{-1}^{2} + \left(\frac{x^3}{3}\right)_{2}^{3} - \left(x^2\right)_{2}^{3}$$

$$= \left(-\frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) - (4-1) + \left(\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right) - (9-4) = -4$$

6) $\int_0^1 t^{10}dt+\int_1^0 t^{10}dt$

حل :

$$\int_0^1 t^{10}dt+\int_1^0 t^{10}dt=\int_0^1 t^{10}dt-\int_0^1 t^{10}dt=0$$

7) $\int_0^1 u^{10}du-\int_1^0 u^{10}du$

حل :

$$\int_0^1 u^{10}du-\int_1^0 u^{10}du=\int_0^1 u^{10}du+\int_0^1 u^{10}du=2\int_0^1 u^{10}du=2\left(\frac{u^{11}}{11}\right)_0^1=2\left(\frac{1}{11}-0\right)=\frac{2}{11}$$

8) $\int_0^1 v^2dv+\int_1^3\left(v^2-1\right)dv+\int_3^2\left(v^2+1\right)dv$

حل :

$$\int_0^1 v^2dv+\int_1^3\left(v^2-1\right)dv+\int_3^2\left(v^2+1\right)dv=\int_0^1 v^2dv+\int_1^3 v^2dv-\int_1^3 dv-\int_2^3 v^2dv-\int_2^3 dv$$

$$=\left(\frac{v^3}{3}\right)_0^1+\left(\frac{v^3}{3}\right)_1^3-(v)_1^3-\left(\frac{v^3}{3}\right)_2^3-(v)_2^3=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{27}{3}-\frac{1}{3}\right)-(3-1)-\left(\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right)-(3-2)=-\frac{1}{3}$$

❖ فرض کنید $f(x)=\begin{cases}2-x\ ,\ x<1 & \text{اگر}\\ x^3\ ,\ x\geq 1 & \text{اگر}\end{cases}$ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

9) $\int_{-2}^3 f(x)dx$

$$\int_{-2}^3 f(x)dx=\int_{-2}^1(2-x)dx+\int_1^3 x^3dx=\int_{-2}^1 2dx-\int_{-2}^1 xdx+\int_1^3 x^3dx$$

$$=(2x)_{-2}^1-\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-2}^1+\left(\frac{x^4}{4}\right)_1^3=(2-(-4))-\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{2}\right)+\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{55}{2}$$

10) $\int_2^{-1} f(x)dx$

حل :

$$\int_2^{-1} f(x)dx=-\int_{-1}^2 f(x)dx-\left(\int_{-1}^1(2-x)dx+\int_1^2 x^3dx\right)=\int_{-1}^1(x-2)dx-\int_1^2 x^3dx$$

$$=\int_{-1}^1 xdx-\int_{-1}^1 2dx-\int_1^2 x^3dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^1-(2x)_{-1}^1-\left(\frac{x^4}{4}\right)_1^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-(2-(-2))-\left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{-31}{4}$$

11) $\int_0^2 f(x+1)dx$

حل :

$$\int_0^2 f(x+1)dx=\int_0^1(2-(x+1))dx+\int_1^2(x+1)^3dx$$

$$\int_0^1(2-x-1)dx+\int_1^2\left(x^3+1+3x+3x^2\right)dx$$

$$= \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^3 dx + \int_1^2 dx + \int_1^2 3x dx + \int_1^2 3x^2 dx = (x)_0^1 - \left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 + \left(\frac{x^4}{4}\right)_1^2 + (x)_1^2$$

$$+\left(\frac{3x^2}{2}\right)_1^2 + \left(\frac{3x^3}{3}\right)_1^2 = (1-0) - \left(\frac{1}{2}-0\right) + \left(\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right) + (2-1) + \left(\frac{12}{2}-\frac{3}{2}\right) + (8-1) = \frac{67}{4}$$

12) $\int_1^2 [f(x) - f(x-1)]dx$

حل :

$$\int_1^2 [f(x) - f(x-1)]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 f(x-1)dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 (x-1)^3 dx$$

$$\int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right) dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 3x^2 dx - \int_1^2 3x\, dx - \int_1^2 dx$$

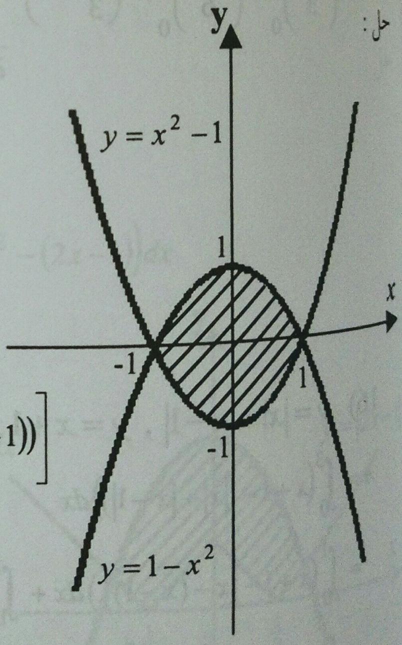
$$= \left(\frac{3x^3}{3}\right)_1^2 - \left(\frac{3x^2}{2}\right)_1^2 - (x)_1^2 = (8-1) - \left(\frac{12}{2}-\frac{3}{2}\right) - (2-1) = \frac{3}{2}$$

❖ مساحت A ی ناحیهٔ R بین منحنیهای زیر را بیابید.

13) $y = 1 - x^2 \quad , \quad y = x^2 - 1$

حل :

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$A = \int_{-1}^1 \left(\left(1 - x^2\right) - \left(x^2 - 1\right)\right)dx$$

$$A = \int_{-1}^1 \left(-2x^2 + 2\right)dx = 2\int_{-1}^1 \left(-x^2 + 1\right)dx$$

$$= 2\left(\int_{-1}^1 -x^2 dx + \int_{-1}^1 dx\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = 2\left[\left(\frac{-x^3}{3}\right)_{-1}^1 + (x)_{-1}^1\right] = 2\left[\left(\frac{-1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)\right) + \left(1 - (-1)\right)\right]$$

14) $y = 2x - x^2 \quad , \quad y = x^2 - 4$

حل :

$$2x - x^2 = x^2 - 4$$

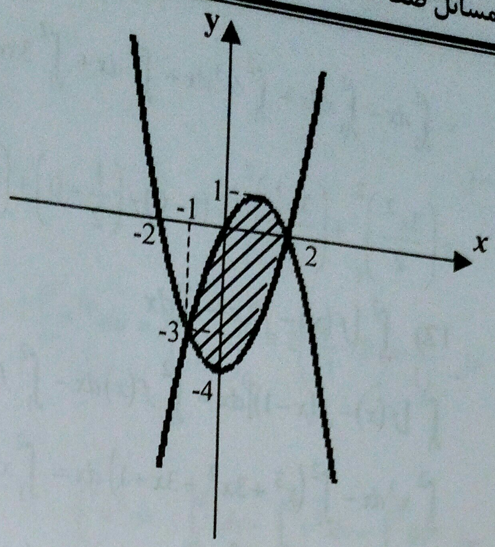
$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-1}^2 \left(2x - x^2 - \left(x^2 - 4\right)\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -2x^2 + 2\int_{-1}^{2} x dx + \int_{-1}^{2} 4\, dx$$

$$= \left(\frac{-2x^3}{3}\right)_{-1}^{2} + +2\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{2} + (4x)_{-1}^{2} = 9$$



15) $y = x^5 \quad , \quad y = x^2$

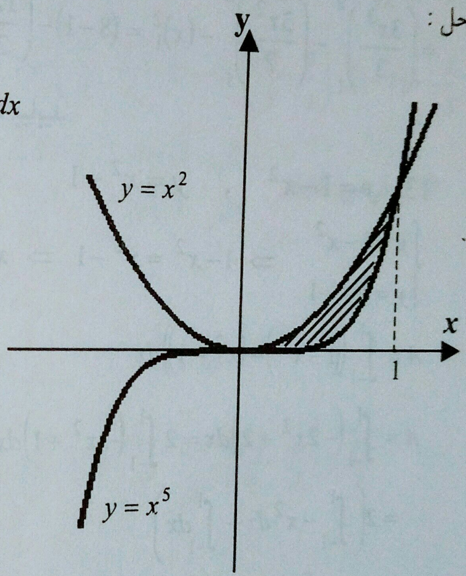
حل :

$$x^5 - x^2 = 0$$

$$x^2\left(x^3 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 \left(x^2 - x^5\right) dx \quad \Rightarrow \quad A = \int_0^1 x^2\, dx - \int_0^1 x^5\, dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 - \left(\frac{x^6}{6}\right)_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{6} - 0\right) = \frac{1}{6}$$



16) $y = |x| + |x-1| \; , \; y = x + 1$

حل :

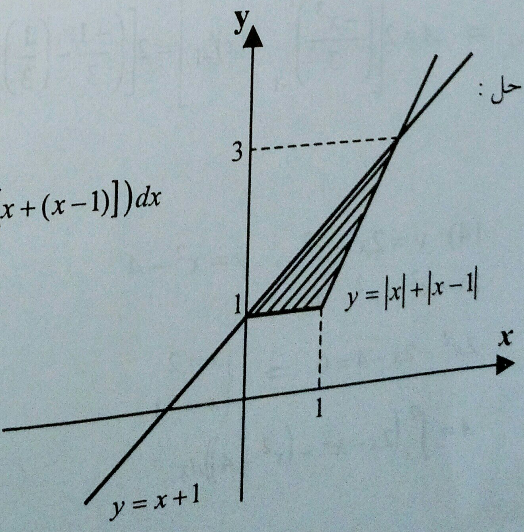
$$A = \int_0^3 \left(x + 1 - \left(|x| + |x-1|\right)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + 1 - [x - (x-1)]\right) dx + \int_1^3 \left(x + 1 - [x + (x-1)]\right) dx$$

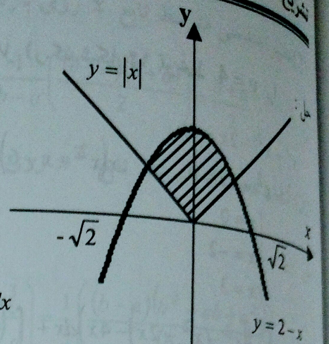
$$= \int_0^1 (x)\, dx + \int_1^3 (-x + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} + \left((-\frac{9}{2} + 6) - (-\frac{1}{2} + 2)\right) = \frac{3}{2}$$



17) $y = 2 - x^2 \ , \ y = |x|$



$2 - x^2 = \pm x$

$x^2 + x - 2 = 0$ غ.ق.ق

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases}$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2 - |x|\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_{-1}^{0} \left(2 - x^2 - (-x)\right) dx + \int_{0}^{1} \left(2 - x^2 - (+x)\right) dx$$

$$A = \int_{-1}^{0} 2dx - \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{-1}^{0} x dx + \int_{0}^{1} 2dx - \int_{0}^{1} x^2 dx - \int_{0}^{1} x dx$$

$$= (2x)_{-1}^{0} - \left(\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^{0} + (2x)_{-1}^{0} - \left(\frac{x^3}{3}\right)_{0}^{1} - \left(\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{1}$$

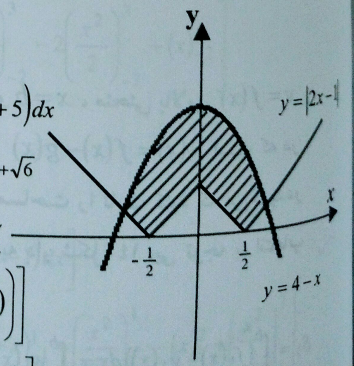
$$= (0 - (-2)) - \left(0 - \left(-\frac{1}{3} +\right)\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\right) + (2 - 0) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{7}{3}$$

18) $y = 4 - x^2 \ , \ y = |2x - 1|$

$4 - x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{6}$

$$A = \int_{-1-\sqrt{6}}^{-1+\sqrt{6}} \left(4 - x^2 - |2x - 1|\right) dx$$

$$\Rightarrow \quad A = \int_{-1-\sqrt{6}}^{1/2} \left(4 - x^2 - (-2x + 1)\right) dx + \int_{1/2}^{-1+\sqrt{6}} \left(4 - x^2 - (2x - 1)\right) dx$$



$$A = \int_{-1-\sqrt{6}}^{1/2} \left(-x^2 + 2x + 3\right) dx + \int_{1/2}^{-1+\sqrt{6}} \left(-x^2 - 2x + 5\right) dx$$

$$= \left(\frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x\right)_{-1-\sqrt{6}}^{1/2} + \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x\right)_{1/2}^{-1+\sqrt{6}}$$

$$= \left[\left(\frac{-1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{(-3.45)^3}{3} + (3.45)^2 + 3(3.45)\right)\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{(-1.45)^3}{3} - (1.45)^2 + 5(1.45)\right) - \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right)\right] = 4.93$$

19) مساحت ناحیه A ی بین منحنی $y=x^3-x^2-2x$ (ر.ک.شکل۱۲)وخط $y=4x$ را بیابید.

حل :

$$x^3-x^2-2x=4x$$

$$x^3-x^2-6x=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(x^2-x-6\right)=0$$

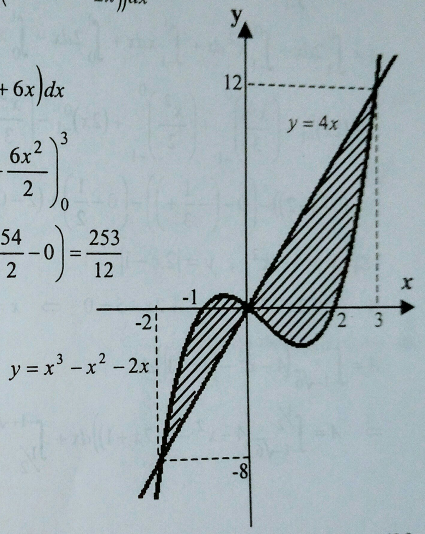
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$A=\int_{-2}^{0}\left(\left(x^3-x^2-2x\right)-4x\right)dx+\int_{0}^{3}\left(4x-\left(x^3-x^2-2x\right)\right)dx$$

$$A=\int_{-2}^{0}\left(x^3-x^2-6x\right)dx+\int_{0}^{3}\left(-x^3+x^2+6x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right)_{-2}^{0}+\left(\frac{-x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}\right)_{0}^{3}$$

$$=\left(0-\left(\frac{16}{4}-\frac{(-8)}{3}-\frac{24}{2}\right)\right)+\left(\frac{-81}{4}+\frac{27}{3}+\frac{54}{2}-0\right)=\frac{253}{12}$$



20)فرض کنید R ناحیهٔ محدود به خطوط قائم $x=a$ و $x=b$ ، منحنی بالایی $y=f(x)$ و منحنی پایینی $y=g(x)\le f(x)$ باشد.گوییم R به عرض $w(x)=f(x)-g(x)$ است که در آن $w(x)$ بر $[a,b]$ تعریف شده است.اصل کاوالیری برای مساحت را ثابت کنید که می‌گویددو ناحیه از این نوع به عرض یکسان $w(x)$ مانند دو ناحیهٔ سایه دار شکل ۱٤ ،بی توجه به انتخاب منحنی های بالایی و پایینی ،دارای مساحت A می‌باشند.

حل :

$$S_1=\int_a^b\left(f_1(x)-g_1(x)\right)dx=\int_a^b w_1(x)dx$$

$$S_2=\int_a^b\left(f_2(x)-g_2(x)\right)dx=\int_a^b w_2(x)dx$$

$$w_1(x)=w_2(x) \quad \Rightarrow \quad S_1=S_2$$

21) تعبیر هندسی متوسط تابع x روی بازهٔ $[a,b]$ چیست؟

حل:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right)_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-a)(b+a)}{2}\right)=\frac{b+a}{2}$$

22) نشان دهید که متوسط تابع x^2 روی بازهٔ $[a,b]$ مساوی است با $\frac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$

حل:

$$\text{میانگین}: f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{(b-a)}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(b^2+a^2+ab\right)$$

❖ به ازای تابع f و نقاط a و b داده شده ، مقدار میانگین f بر $[a,b]$ را بیابید.

23) $f(x)=1-x-x^2 \quad , \quad a=0 \quad , \quad b=4$

حل:

$$f(c)=\frac{1}{4-0}\int_0^4\left(1-x-x^2\right)dx=\frac{1}{4}\left(\int_0^4 dx-\int_0^4 xdx-\int_0^4 x^2dx\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[(x)_0^4-\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^4-\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^4\right]=\frac{1}{4}\left[(4-0)-\left(\frac{16}{2}-0\right)-\left(\frac{64}{3}-0\right)\right]=-\frac{19}{3}$$

24) $f(x)=x^3-2x+1 \quad , \quad a=-2 \quad , \quad b=3$

حل:

$$f(c)=\frac{1}{3-(-2)}\int_{-2}^3\left(x^3-2x+1\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\left[\int_{-2}^3 x^3dx-2\int_{-2}^3 xdx+\int_{-2}^3 dx\right]=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{x^4}{4}\right)_{-2}^3-2\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-2}^3+(x)_{-2}^3\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{81}{4}-\frac{16}{4}\right)-2\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)+(3-(-2))\right]=\frac{13}{4}$$

25) $f(x)=|1-x| \quad , \quad a=-1 \quad , \quad b=2$

حل:

$$f(c)=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^2|1-x|dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-1}^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\int_{-1}^1 dx-\int_{-1}^1 xdx-\int_1^2 dx+\int_1^2 xdx\right]=\frac{1}{3}\left[(+x)_{-1}^1-\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^1-(x)_1^2+\left(\frac{x^2}{2}\right)_1^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[(1-(-1))-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-(2-1)+\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{5}{6}$$

26) $f(x)=x^4+5x^2-10 \quad , \quad a=-3 \quad , \quad b=-1$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{-1-(-3)}\int_{-3}^{-1}\left(x^4+5x^2-10\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-3}^{-1}x^4dx+5\int_{-3}^{-1}x^2dx-\int_{-3}^{-1}10dx\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^5}{5}\right)_{-3}^{-1}+5\left(\frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{-1}-\left(10x\right)_{-3}^{-1}\right]=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{5}-\left(\frac{-243}{5}\right)\right)+5\left(\frac{-1}{3}-\left(\frac{-27}{3}\right)\right)-\left(-10-(-30)\right)\right]=\frac{538}{15}$$

❖ نقطهٔ c صادق در فرمول مقدار میانگین (۷) را در صورتی بیابید که

27) $f(x)=x \quad , \quad a=1 \quad , \quad b=7$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{7-1}\int_1^7 xdx=\frac{1}{6}\int_1^7 xdx=\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\right)_1^7=\frac{1}{6}\left(\frac{49}{2}-\frac{1}{2}\right)=4$$

$f(c)=4 \Rightarrow c=4$

28) $f(x)=2x+3 \quad , \quad a=-1 \quad , \quad b=3$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{3-(-1)}\int_{-1}^{3}(2x+3)dx=f(c)=\frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{3}2xdx+\int_{-1}^{3}3dx\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(x^2\right)_{-1}^{3}+\left(3x\right)_{-1}^{3}\right]=\frac{1}{4}\left[(9-1)+(9-(-3))\right]=5$$

$f(c)=5=2c+3 \Rightarrow c=1$

29) $f(x)=x^2 \quad , \quad a=2 \quad , \quad b=0$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{0-2}\int_2^0 x^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^2 -x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-0\right)=\frac{4}{3}$$

$c^2=\frac{4}{3} \Rightarrow c_2=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad c\in[2,0] \Rightarrow \frac{-2}{\sqrt{3}}$ غ.ق.ق

30) $f(x)=3x^2+1 \quad , \quad a=4 \quad , \quad b=1$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{1-4}\int_4^1\left(3x^2+1\right)dx=\frac{-1}{3}\left(-\int_1^4\left(3x^2+1\right)dx\right)=\frac{1}{3}\left[\int_1^4 3x^2\,dx+\int_1^4 dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3x^3}{3}\right)_1^4+(x)_1^4\right]=\frac{1}{3}\left[(64-1)+(4-1)\right]=22$$

$3c^2+1=22 \Rightarrow 3c^2=21 \Rightarrow c^2=7$

$c=+\sqrt{7} \quad , \quad c\in[1,4] \Rightarrow c=-\sqrt{7}$ غ.ق.ق

31) $f(x)=\left|x^2-1\right| \quad , \quad a=-2 \quad , \quad b=2$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|dx=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx+\int_{+1}^{2}\left(x^2-1\right)dx\right]$$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
$\lvert x^2-1\rvert$	x^2-1		$1-x^2$		x^2-1

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)_{1}^{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{-1}{3}-(-1)-\left(\frac{-8}{3}+2\right)+\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right)+\left(\frac{8}{3}-2-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right)\right]=1$$

$$f(c)=1 \;\Rightarrow\; \left|c^2-1\right|=1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} c^2-1=1 \\ -c^2+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2=2 \;\Rightarrow\; c=\pm\sqrt{2} \\ c^2=0 \;\Rightarrow\; c=0 \end{cases}$$

هر سه جواب در بازهٔ $[-2,2]$ قرار دارند .

32) $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & x<0 \\ x & x\geq 0 \end{cases} \qquad a=-1 \;,\; b=2$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = f(c)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-1}^{0} 2x^2\,dx+\int_{0}^{2} x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(2\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}\right)_{0}^{2}\right]=\frac{1}{3}\left[\left(0-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)+\left(\frac{4}{2}-0\right)\right]=\frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c^2=\frac{8}{9} \;\Rightarrow\; c=\pm\frac{2}{3} \\ c=\frac{8}{9} \end{cases}$$

هر سه جواب قابل قبول است

33) فرض کنید f,g بر $[a,b]$ پیوسته بوده ،و $f(x)\geq g(x)$ با دست کم یک نقطهٔ c در $[a,b]$ که $f(c)\neq g(c)$.نشان دهید که

$$\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx$$

حل:

$$f(x)\geq g(x) \;\Rightarrow\; f(x)-g(x)>0 \;\Rightarrow\; \int_a^b (f(x)-g(x))>0$$

$$\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx>0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx$$

34) تحقیق کنید که

$$\frac{1}{6}<\int_0^2 \frac{1}{10+x}\,dx<\frac{1}{5}$$

حل : طبق قاعدهٔ (شش) صفحهٔ ۳۷۸ داریم: $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$ (m و M به ترتیب مینیمم ماکزیمم تابع $f(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ میباشند)

$$f(x)=\frac{1}{10+x} \xrightarrow{\text{بازه }(0,2)} \begin{cases} m=\frac{1}{12} \\ M=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}(2-0) \le \int_0^2 \frac{1}{10+x}dx \le \frac{1}{10}(2-0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} \le \int_0^2 \frac{1}{10+x}dx \le \frac{1}{5}$$

35) $\int_0^1 x^2dx$ یا $\int_0^1 xdx$

حل :

$$x\in[0,1] \quad \Rightarrow \quad x > x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 xdx > \int_0^1 x^2dx$$

36) $\int_1^2 x^2dx$ یا $\int_1^2 xdx$

حل :

$$x\in[1,2] \quad \Rightarrow \quad x^2 > x \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 x^2dx > \int_1^2 xdx$$

37) $\int_0^{\pi/2} xdx$ یا $\int_0^{\pi/2} \sin xdx$

حل :

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x > \sin x \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi/2} xdx > \int_0^{\pi/2} \sin xdx$$

38) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} xdx$ یا $\int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx$

حل :

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 0 < \sin x < 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x > \sin^{10} x$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^2 xdx > \int_0^{\pi/2} \sin^{10} xdx$$

39)نشان دهید نقطهٔ c قضیهٔ ۳ را می‌توان همیشه یک نقطهٔ درونی بلزهٔ $[a,b]$ در نظر گرفت.

حل : با توجه به مثال ۸ می توان گفت که اگر f غیر ثابت باشد ، f مقادیر ماکزیمم و مینیمم f بر $[a,b]$ می گیرد پس نقطهٔ c را می توان نقطهٔ درونی در نظر گرفت .

40)فرض کنید f بر $[1,4]$ پیوسته بوده و $f(3)\neq 0$.کدامیک بزرگتر است.

$$I_1 = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^1 f(x)dx$$

$I_2 = \int_{\sqrt{5}}^{\pi} f(x)dx$ یا

حل :

$f(3)\neq 0$ و f بر $[1,4]$ پیوسته

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^1 f(x)dx = 0$$

$$f^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\sqrt{5},\pi\right] \quad \Rightarrow \quad I_2 = \int_{\sqrt{5}}^{\pi} f^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad I_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 > I_1$$

1) x^2+x+2

حل: $\int\left(x^2+x+2\right)dx=\int x^2dx+\int xdx+\int 2dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C$

2) $x(x-1)(x-2)$

حل: $\int x(x-1)(x-2)dx=\int\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=\int x^3dx-3\int x^2dx+2\int xdx$

$$=\frac{x^4}{4}-3\left(\frac{x^3}{3}\right)+2\left(\frac{x^2}{2}\right)+C=\frac{x^4}{4}-x^3+x^2+C$$

3) $x^{49}-5x^{24}+20x^9-10$

حل: $\int\left(x^{49}-5x^{24}+20x^9-10\right)dx=\int x^{49}dx-\int 5x^{24}dx+20\int x^9dx-\int 10dx+C$

$$=\frac{x^{50}}{50}-\frac{5x^{25}}{25}+20\frac{x^{10}}{10}-10x+C=\frac{x^{50}}{50}-\frac{x^{25}}{5}+2x^{10}-10x+C$$

4) $\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{2}x^{2/3}$

حل: $\int\left(\frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{2}x^{2/3}\right)dx=\int\frac{2}{3}x^{3/2}dx+\int\frac{3}{2}x^{2/3}dx=\frac{2}{3}\left(\frac{x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1}\right)+\left(\frac{3}{2}\times\frac{x^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1}\right)+C$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}\times\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}+C=\frac{4}{15}x^{5/2}+\frac{9}{10}x^{5/3}+C$$

5) $x^{-3/4}-x^{-4/3}$

حل: $\int\left(x^{-3/4}-x^{-4/3}\right)dx=\int x^{-3/4}dx-\int x^{-4/3}dx+C$

$$=\frac{x^{-3/4}}{\frac{-3}{4}+1}-\frac{x^{-4/3+1}}{\frac{-4}{3}+1}+C=\frac{x^{1/4}}{\frac{1}{4}}-\frac{x^{-1/3}}{\frac{-1}{3}}+C=4x^{1/4}-\frac{3}{x^{1/3}}+C$$

6) $\frac{\left(1+x+x^2\right)}{x^4}$

حل: $\int\frac{\left(1+x+x^2\right)}{x^4}dx=\int\left(x^{-4}+x^{-3}+x^{-2}\right)dx=\int x^{-4}dx+\int x^{-3}dx+\int x^{-2}dx$

$$=\frac{x^{-3}}{-3}+\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{-x^{-3}}{3}-\frac{x^{-2}}{2}-x^{-1}+C$$

7) $2\sin x - 3\cos x$

حل :

$$\int (2\sin x - 3\cos x)dx = 2\int \sin x dx - 3\int \cos x dx$$
$$= -2\cos x - 3\sin x + C$$

8) $5\sec^2 x + 4\csc^2 x$

حل :

$$\int \left(5\sec^2 x + 4\csc^2 x\right)dx = 5\int \sec^2 x dx + 4\int \csc^2 x dx$$
$$= 5\tan x - 4\cot x + C$$

9) $(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)$

حل :

$$\int (1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)dt = \int \left(1-t^2\right)\left(1+t^2\right)dt = \int \left(1-t^4\right)dt = \int \left(1-t^4\right)dt = \int dt - \int t^4 dt$$
$$= t - \frac{t^5}{5} + C$$

10) $(3+2u)\left(9-6u+4u^2\right)$

حل :

$$\int (3+2u)\left(9-6u+4u^2\right)du = \int \left(3^3 + (2u)^3\right)du = \int \left(27+8u^3\right)du = 27u + \frac{8u^4}{4} + C$$

11) $(2-3v)\left(4+6v+9v^2\right)$

حل :

$$\int (2-3v)\left(4+6v+9v^2\right)dv = \int \left((2)^3 - (3v)^3\right)dv = \int \left(8-27v^3\right)dv = 8v - \frac{27v^4}{4} + C$$

12) $\frac{1}{4}w^2 - \frac{1}{2}w^2 + 8\sec w \tan w$

حل :

$$\int \left(\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{2}w^2 + 8\sec w \tan w\right)dw$$
$$= \frac{1}{4}\int w^4 dw - \frac{1}{2}\int w^2 dw + 8\int \sec w \tan w dw = \frac{1}{4}\frac{w^5}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{w^3}{3}\right) + 8\sec w + C$$
$$= \frac{w^4}{20} - \frac{w^3}{6} + 8\sec w + C$$

13) نشان دهید هرگاه $F(x)$ پادمشتقی از $f(x)$ باشد، آنگاه $-F(-x)$ پادمشتقی از $f(-x)$ است.

حل :

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \int f(-x)dx = -F(-x) + C$$

۱۴) با استفاده از مشتقگیری، نشان دهید $\sin^2 x = C - \frac{1}{2}\cos 2x$ که در آن C ثابت است و C را پیدا کنید.

حل:

$$\sin^2 x = C - \frac{1}{2}\cos 2x \xrightarrow{\text{مشتق از طرفین}} 2\sin x\cos x$$

$$= \frac{1}{2}(2)\sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \sin 2x$$

داریم $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

۱۵) در باب تابع $f(x)$ که مشتق n مش $f^{(n)}(x)$ متحد صفر است چه می‌توان گفت؟

حل:

اگر $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}\ ,\ f''(x) = k(k-1)x^{k-2}\ ,\dots,\ f^{(k)}(x) = k! \Rightarrow f^{(k+1)}(x) = 0$

پس این تابع چند جمله ای از درجهٔ کمتر از n می باشد

❖ انتگرالهای زیر را حساب کنید.

16) $\int (x+5)(x-6)dx$

حل:

$$\int (x+5)(x-6)dx = \int \left(x^2 - x - 30\right)dx = \int x^2 dx - \int x dx - 30\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 30x + C$$

17) $\int \left(x^4 - 3x^2 + 2x - 4\right) dx$

حل:

$$\int \left(x^4 - 3x^2 + 2x - 4\right)dx = \int x^4 dx - 3\int x^2 dx + 2\int x dx - 4\int dx$$

$$= \frac{x^5}{5} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 4x + c = \frac{x^5}{5} - x^3 + x^2 - 4x + C$$

18) $\int x(1+x)(1-x)dx$

حل:

$$\int x(1+x)(1-x)dx = \int x\left(1 - x^2\right)dx = \int x dx - \int x^3 dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$$

19) $\int \left(x^3 - x + \frac{1}{x^2} - \sin 3x\right)dx$

حل:

$$\int \left(x^3 - x + \frac{1}{x^2} - \sin 3x\right)dx = \int x^3 - \int x dx + \int x^{-2} dx - \int \sin 3x dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C$$

20) $\int t^2(5-t)^4\,dt$

حل :

$$\int t^2(5-t)^4\,dt = \int t^2\left(5^4-4(5)^3t+6(5)^2t^2-4\times5\times t^3+t^4\right)dt$$

$$=\int t^2\left(625-500t+150t^2-20t^3+t^4\right)dt=\int\left(625t^2-500t^3+150t^4-20t^5+t^6\right)dt$$

$$=625\int t^2dt-500\int t^3dt+150\int t^4dt-20\int t^5dt+\int t^6dt$$

$$=625\left(\frac{t^3}{3}\right)-500\left(\frac{t^4}{4}\right)+150\left(\frac{t^5}{5}\right)-20\left(\frac{t^6}{6}\right)+\frac{t^7}{7}+C$$

$$=\frac{t^7}{7}-\frac{10}{3}t^6+30t^5-125t^4+\frac{625}{3}t^3+C$$

21) $\int (1-u)(1-2u)(1-3u)\,du$

حل :

$$\int(1-u)(1-2u)(1-3u)\,du=\int\left(-6u^3+11u^2-6u+1\right)du$$

$$=-6\int u^3du+11\int u^2du-6\int udu+\int du$$

$$=-6\frac{u^4}{4}+11\left(\frac{u^3}{3}\right)-6\left(\frac{u^2}{2}\right)+u+C=-\frac{3}{2}u^4+\frac{11}{3}u^3-3u^2+u+C$$

22) $\int \frac{v+1}{\sqrt{v}}\,dv$

حل :

$$\int\frac{v+1}{\sqrt{v}}dv=\int\left(\frac{v}{\sqrt{v}}+\frac{1}{\sqrt{v}}\right)dv=\int\left(v^{1/2}+v^{-1/2}\right)dv=\int v^{1/2}dv+\int v^{-1/2}dv$$

$$=\frac{v^{3/2}}{\frac{3}{2}}+\frac{v^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}v^{3/2}+2v^{1/2}+C$$

23) $\int \sin^2 x\,dx$

حل :

$$\int\sin^2 xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[\int dx-\int\cos 2xdx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

24) $\int \tan^2 x\,dx$

حل :

$$\int\tan^2 xdx=\int\left(\tan^2 x+1-1\right)dx=\int\left(\sec^2 x-1\right)dx=\int\sec^2 xdx-\int dx$$

$$=\tan x-x+C$$

25) $\int \cot^2 x dx$

حل:

$$\int \cot^2 x dx = \int \left(\cot^2 x + 1 - 1\right) dx = \int \left(\csc^2 x - 1\right) dx = \int \csc^2 x dx - \int dx = -\cot x - x + C$$

26) $\int \sin x \cos x dx$

حل:

$$\int \sin x \cos x dx = \int \frac{1}{2}\left(2 \sin x \cos x\right) dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$$

27) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

حل:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x \, dx = \sec x + C$$

28) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

حل:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right)\left(1 + \cot^2 x\right) dx$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 x + \cot^2 x + 1\right) dx = 2\int dx + \int \tan^2 x dx + \int \cot^2 x dx$$

$$= 2\int dx + \int \left(\tan^2 x + 1 - 1\right) dx + \int \left(\cot^2 x + 1 - 1\right) dx$$

$$= 2\int dx + \int \sec^2 x dx - \int dx + \int \csc^2 x dx - \int dx = \tan x - \cot x + C = -2\cot 2x + C$$

29) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$

حل:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} dx = 2\int \cos x dx = 2 \sin x + C$$

30) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

حل:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C$$

31) $\int \frac{\cos 3u}{\cos u} du$

حل:

$$\int \frac{\cos 3u}{\cos u} du = \int \frac{\cos\left(u + 2u\right)}{\cos u} du = \int \frac{\cos u \cos 2u - \sin u \sin 2u}{\cos u} du$$

$$= \int \left(\frac{\cos u \cos 2u}{\cos u} - \frac{\sin u(2\sin u \cos u)}{\cos u} \right) du = \int \cos 2u du - 2\int \sin^2 u du$$

$$= \int \cos 2u du - 2\int \frac{(1-\cos 2u)}{2} du = \int \cos 2u du - \int du + \int \cos 2u du$$

$$= 2\int \cos 2u du - \int du = 2\frac{1}{2}\sin 2u - u + C = \sin 2u - u + C$$

32) $\int \frac{\sin 3v}{\sin v} dv$

حل :

$$\int \frac{\sin 3v}{\sin v} dv = \int \frac{\sin(2v+v)}{\sin v} dv = \int \frac{\sin 2v \cos v + \cos 2v \sin v}{\sin v} dv$$

$$= \int \frac{(2\sin v \cos v)\cos v}{\sin v} dv + \int \frac{\cos 2v \sin v}{\sin v} dv = \int 2\cos^2 v dv + \int \cos 2v dv$$

$$= \int 2\frac{(1+\cos 2v)}{2} dv + \int \cos 2v dv = \int dv + \int \cos v dv + \int \cos 2v dv$$

$$= v + \frac{1}{2}\sin 2v + \frac{1}{2}\sin 2v + C = v + \sin 2v + C$$

33) $\int \frac{w^4-1}{w-1} dw$

حل :

$$\int \frac{w^4-1}{w-1} dw = \int \frac{(w^2-1)(w^2+1)}{(w-1)} dw = \int \frac{(w+1)(w-1)(w^2+1)}{(w-1)} dw$$

$$= \int (w^2+1)(w+1) dw = \int (w^3+w^2+w+1) dw = \int w^3 dw + \int w^2 dw + \int w dw + \int dw$$

$$= \frac{w^4}{4} + \frac{w^3}{3} + \frac{w^2}{2} + w + C$$

34) $\int \frac{z^4-16}{x+2} dz$

حل :

$$\int \frac{z^4-16}{x+2} dz = \int \frac{(z^2-4)(z^2+4)}{z+2} dz = \int \frac{(z+2)(z-2)(z^2+4)}{z+2} dz$$

$$= \int (z-2)(z^2+4) dz = \int (z^3+4z-2z^2-8) dz = \int z^3 dz + 4\int z dz - 2\int z^2 dz - 8\int dz$$

$$= \frac{z^4}{4} - \frac{2z^3}{3} + \frac{4z^2}{2} - 8z + C$$

35) $\int \frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x} dx$

حل :

$$\int \frac{1-\sin^3 x}{1-\sin x} dx = \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{(1-\sin x)} dx = \int (1+\sin x+\sin^2 x) dx$$

$$= \int dx + \int \sin x + \int \sin^2 x dx = \int dx + \int \sin x + \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx$$

$$= \int dx + \int \sin x + \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x dx\right] = x - \cos x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$= \frac{3}{2}x - \cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

36) $\int \frac{1+\cos^3 x}{1+\cos x} dx$

حل:

$$\int \frac{1+\cos^3 x}{1+\cos x} dx = \int \frac{(1+\cos x)(1+\cos^2 x - \cos x)}{1+\cos x} dx = \int (1+\cos^2 x - \cos x) dx$$

$$= \int dx - \int \cos x + \int \cos^2 x dx = \int dx - \int \cos x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x) dx$$

$$= \int dx - \int \cos x + \frac{1}{2}\left[\int dx + \int \cos 2x dx\right] = x - \sin x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$= \frac{3}{2}x - \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

37) $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x) dx$

حل:

$$\int_a^b f(x) dx = k \ (\text{عدد ثابت}) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dx}(k) = 0$$

38) $\frac{d}{da}\int_a^b f(x) dx$

حل:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t) dt = f(x) \ \Rightarrow \ \frac{d}{da}\int_b^a f(x) dx = \frac{d}{da}\left(-\int_a^b f(x) dx\right) = -f(a)$$

39) $\frac{d}{db}\int_a^b f(x) dx$

حل:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t) dt = f(x) \ \Rightarrow \ \frac{d}{db}\int_a^b f(x) dx = f(b)$$

40) $\frac{d}{dx}\int_0^x t^{50}(1-t)^{50} dt$

حل:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t) dt = f(x) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dx}\int_0^x t^{50}(1-t)^{50} dt = x^{50}(1-x)^{50}$$

41) $\frac{d}{dt}\int_1^t (1+\sin x)^{25} dx$

حل:

$$\frac{d}{dt}\int_c^t f(x) dx = f(t) \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\int_1^t (1+\sin x)^{25} dx = (1+\sin t)^{25}$$

42) $\frac{d}{dt}\int_0^1 (2+\tan t)^{99} dt$

حل:

$k \quad \int_0^1 (2+\tan t)^{99} dt = k$ (k عددثابت است)

مشتق عدد ثابت صفر است $\Rightarrow \frac{d}{dt}(k) = 0$

1) با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و مسئله ۱۳ ، صفحه (۴۰۷) ، نشان دهید که اگر f زوج باشد، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ ، که معنی هندسی آن در شکل ۲۱ (آ) نموده شده است . همچنین ، نشان دهید که اگر f فرد باشد ، $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ ، که معنی هندسی آن در شکل ۲۱ (ب) نموده شده است . فرض کنید f بر $[-a,a]$ پیوسته باشد .

حل : نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است $\Rightarrow$ تابع زوج

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x) \xrightarrow{\text{تابع زوج}} \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \xrightarrow{\text{تابع فرد}} \int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(x)dx \;\Rightarrow\; \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

2) $[F(x)+G(x)]_a^b$ و $[F(x)G(x)]_a^b$ را بر حسب $[F(x)]_a^b$ و $[G(x)]_a^b$ بیان نمایید .

حل :

$$[F(x)+G(x)]_a^b = [f(x)]_a^b + [G(x)]_a^b$$

$$[F(x)G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \cdot [G(x)]_b^a$$

❖ انتگرالهای زیر را حساب کنید .

3) $\int_{0}^{2}\left(x^3-2x^2+3x-4\right)dx$

حل :

$$\int_{0}^{2}\left(x^3-2x^2+3x-4\right) = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4x\right]_0^2$$

$$= \left[\left(\frac{16}{4}-\frac{2\times 8}{3}+\frac{12}{2}-8\right)-\left(0-0+0-0\right)\right] = \frac{-10}{3}$$

4) $\int_{-1}^{1}\left(x^9+5x^8+10x^7\right)dx$

حل :

$$\int_{-1}^{1}\left(x^9+5x^8+10x^7\right)dx = \left[\frac{x^{10}}{10}+\frac{5x^9}{9}+\frac{10x^8}{8}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{10}+\frac{5}{9}+\frac{10}{8}\right)-\left(\frac{1}{10}-\frac{5}{9}+\frac{10}{8}\right) = \frac{10}{9}$$

5) $\int_{2}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)dx$

حل :

$$\int_{2}^{1}\left(x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}\right)dx = \int_{1}^{2}\left(-x^{-2}+x^{-3}-x^{-4}\right)dx$$

$$\left[-\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^2 = \left[+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right)-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{12}$$

6) $\int_1^9 \left(\sqrt{s}+1\right) ds$

حل:

$$\int_1^9\left(\sqrt{s}+1\right)ds=\int_1^9\left(s^{1/2}+1\right)ds=\left[\frac{2}{3}s^{3/2}+s\right]_1^9=\left(\frac{2}{3}9^{3/2}+9\right)-\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{76}{3}$$

7) $\int_1^2\left(3s^3-\frac{5}{5^4}\right)ds$

حل:

$$\int_1^2\left(3s^3-\frac{5}{5^4}\right)ds=\int_1^2\left(3s^3-5s^{-4}\right)ds=\left[\frac{3s^4}{3}-5\frac{s^{-3}}{-3}\right]_1^2=\left[\frac{3}{4}s^4+\frac{5}{3}\frac{1}{s^3}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{3}{4}\times16+\frac{5}{3}\times\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{3}\right)=\frac{235}{24}$$

8) $\int_0^3\frac{dt}{(2t+1)^2}$

حل:

$$\int_0^3\frac{dt}{(2t+1)^2}=\int_0^3(2t+1)^{-2}=\left[\frac{1}{2}\frac{(2t+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_0^3=\left[\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2t+1}\right]_0^3$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\times\frac{1}{7}\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{3}{7}$$

9) $\int_4^{16}\frac{1-t}{\sqrt{t}}dt$

حل:

$$\int_4^{16}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{t}{\sqrt{t}}\right)dt=\int_4^{16}\left(t^{-1/2}-t^{1/2}\right)dt=\left[2t^{1/2}-\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_4^{16}$$

$$=\left[2(16)^{1/2}-\frac{2}{3}(16)^{3/2}\right]-\left[2(4)^{1/2}-\frac{2}{3}(4)^{3/2}\right]=\frac{-100}{3}$$

10) $\int_{-1}^1\frac{du}{(2-u)^3}$

حل:

$$\int_{-1}^1\frac{du}{(2-u)^3}=\int_{-1}^1(2-u)^{-3}du=\left[-\frac{(2-u)^{-3+1}}{-3+1}\right]_{-1}^1=\left[\frac{1}{2(2-u)^{+2}}\right]_{-1}^1$$

$$=\left(\frac{1}{2(2-1)^2}-\frac{1}{2(2-(-1))^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}=\frac{4}{9}$$

11) $\int_1^{27}u^{-2/3}du$

حل:

$$\int_1^{27}u^{-2/3}du=\left(\frac{u^{-2/3+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right)_1^{27}=\left(\frac{u^{1/3}}{\frac{1}{3}}\right)=\left(3u^{1/3}\right)_1^{27}=9-3=6$$

12) $\int_{-8}^{1}\left(1+v^{2/3}\right)dv$

حل : $\int_{-8}^{1}\left(1+v^{2/3}\right)dv=\left[v+\frac{v^{5/3}}{\frac{5}{3}}\right]_{-8}^{1}=\left[v+\frac{3}{5}v^{5/3}\right]_{-8}^{1}=\left(1+\frac{3}{5}\right)-\left(-8+\frac{3}{5}(-8)^{5/3}\right)=\frac{144}{5}$

13) $\int_{1}^{4}\left(v^{3/2}-v^{1/2}\right)dv$

حل : $\int_{1}^{4}\left(v^{3/2}-v^{1/2}\right)dv=\left[\frac{2}{5}v^{5/2}-\frac{2}{3}v^{3/2}\right]_{1}^{4}=\left(\frac{2}{5}(32)-\frac{2}{3}(8)\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=\frac{116}{15}$

14) $\int_{0}^{\pi}(2+3\sin x)dx$

حل : $\int_{0}^{\pi}(2+3\sin x)dx=[2x-3\cos x]_{0}^{\pi}=(2\pi-3(-1)-(0-3(1)))=2\pi+6$

15) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos x-1)dx$

حل : $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos x-1)dx=[+2\sin x-x]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\left(2(1)-\frac{\pi}{2}\right)-\left(2-(-1)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=4-\pi$

16) $\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 x dx$

حل : $\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 x dx=\int_{0}^{\pi/2}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{0}^{\pi/2}=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(0)\right)=\frac{\pi}{4}$

17) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx$

حل : $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}=\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=\pi$

18) $\int_{0}^{2\pi}\sin x\cos x dx$

حل : $\int_{0}^{2\pi}\sin x\cos x dx=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)dx=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}\sin 2x dx$

$=\left[\frac{-1}{4}\cos 2x\right]_{0}^{2\pi}=\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=0$

19) $\int_{0}^{\pi/3}\frac{dt}{\cos^2 t}$

حل : $\int_{0}^{\pi/3}\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_{0}^{\pi/3}\sec^2 t dt=[\tan x]_{0}^{\pi/3}=\sqrt{3}$

20) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\sin^2 u}$

حل: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{\sin^2 u} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 u\,du = [-\cot u]_{\pi/4}^{\pi/2} = (0-(-1)) = 1$

21) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dv}{\sin^2 v \cos^2 v}$

حل: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dv}{\sin^2 v \cos^2 v} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1+\tan^2 v)(1+\tan^2 v)\,dv = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1+\tan^2 v+\cot^2 v+1)\,dv$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1+\tan^2 v)\,dv + \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1+\cot^2 v)\,dv = [\tan v]_{\pi/6}^{\pi/3} + [-\cot v]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - (\sqrt{3})\right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

22) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\,dx$

حل: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x (\sin^2 x)^2\,dx = \int_{=-\pi}^{\pi} \sin x (1-\cos^2 x)^2\,dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x (1+\cos^4 x - 2\cos^2 x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \sin x \cos^4 x - 2\sin x \cos^2 x)\,dx$

$= \left[-\cos x - \frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x\right]_{-\pi}^{\pi}$

$= \left(-(-1) - \frac{1}{5}(-1) + \frac{2}{3}(-1)\right) - \left(-(-1) - \frac{1}{5}(-1) + \frac{2}{3}(-1)\right) = 0$

23) $\int_{-1}^{1} \sin^4 x \tan x\,dx$

حل: $\int_{-1}^{1} \sin^4 x \times \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{-1}^{1} (1-\cos^2 x)^2 \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_{-1}^{1} (1+\cos^4 x - 2\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int_{-1}^{1} \tan x\,dx + \int_{-1}^{1} \cos^3 x \sin x\,dx - \int_{-1}^{1} \sin 2x\,dx = \left[-\ln|\cos x| - \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-1}^{1} = 0$

روش دوم حل:

$\tan x \to$ تابع فرد

$\sin^4 x \to$ تابع زوج

$\tan x \sin^4 x =$ تابع فرد

$\int_{-a}^{+a}($ تابع فرد $) = 0$

24) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cot x}{\sin x}\,dx$

حل: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\cot x}{\sin x}\,dx = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot x \frac{1}{\sin x} = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cot x \csc x = [-\csc x]_{\pi/4}^{3\pi/4}$

$$=\left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}=\left(-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\left(\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\right)=0$$

25) $\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x}{\cos x}dx$

حل :

$$\int_0^{\pi/4}\frac{\tan x}{\cos x}dx=\int_0^{\pi/4}\tan x\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\pi/4}\tan x\sec x\,dx=[\sec x]_0^{\pi/4}$$

$$=\left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\pi/4}=\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{1}\right)=\sqrt{2}-1$$

26) $y=\sqrt[3]{x}\quad,\quad y=\sqrt{x}$

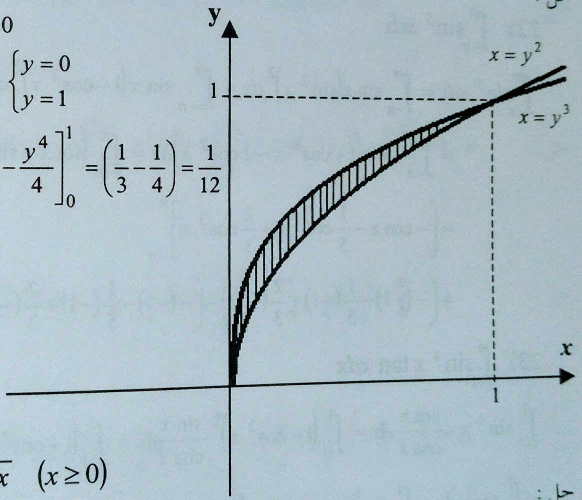
حل :

$y=\sqrt{x}\ \Rightarrow\ x=y^2\quad,\quad y=\sqrt[3]{x}\ \Rightarrow\ x=y^3$

$y^3=y^2\ \Rightarrow\ y^3-y^2=0$

$\Rightarrow\ y^2(y-1)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}y=0\\y=1\end{cases}$

$$A=\int_0^1\left(y^2-y^3\right)dy=\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}$$



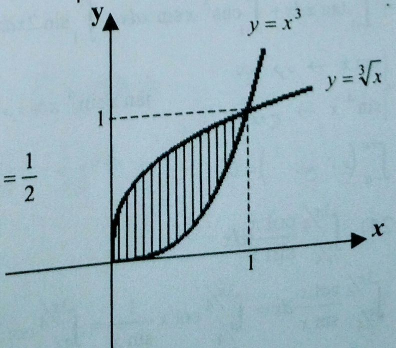
27) $y=x^3\quad,\quad y=\sqrt[3]{x}\quad(x\ge 0)$

حل :

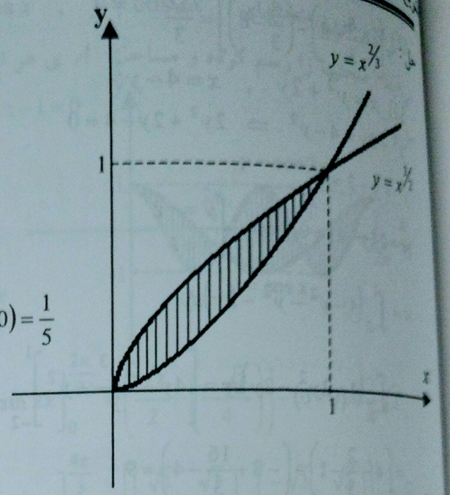
$x^3=\sqrt[3]{x}\ \Rightarrow\ x^9=x\ \Rightarrow\ x^9-x=0$

$x\left(x^8-1\right)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=0\\x=+1\end{cases}$

$$A=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)dx=\left[\frac{3x^{4/3}}{4}\right]_0^1=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$



28) $y = x^{3/2} \quad , \quad y = x^{2/3}$



$x^{3/2} = x^{2/3}$

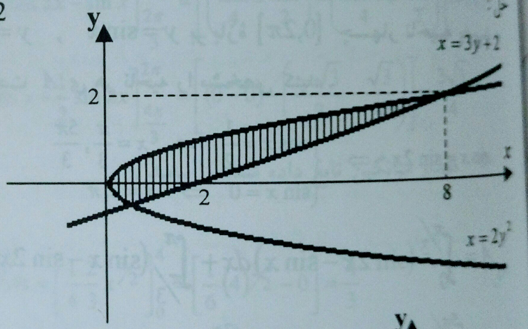
$x^9 = x^4 \quad \Rightarrow \quad x^9 - x^4 = 0$

$\Rightarrow \quad x^4(x^5 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$A = \int_0^1 \left(x^{2/3} - x^{3/2}\right) dx$

$= \left[\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{5}$

29) $x = 2y^2 \quad , \quad x = 3y + 2$



$2y^2 = 3y + 2$

$2y^2 - 3y - 2 = 0$

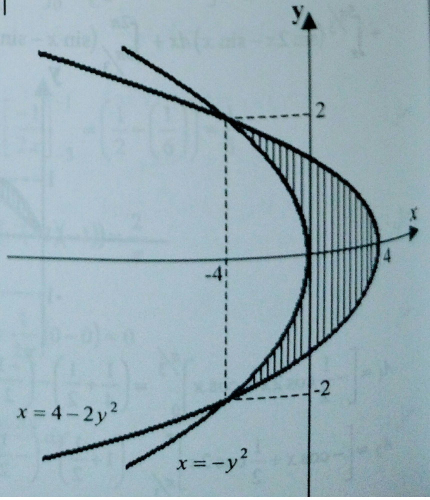
$y = 2 \quad , \quad y = -\frac{1}{2}$

$A = \int_{-1/2}^{2} \left(3y + 2 - 2y^2\right) dy$

$= \left[\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{2y^3}{3}\right]_{-1/2}^{2}$

$= \left[\left(\frac{12}{2} + 4 - \frac{16}{3}\right) - \left(\frac{3}{8} - 1 + \frac{1}{12}\right)\right] = \frac{125}{24}$

30) $x = 4 - 2y^2 \quad , \quad x = -y^2$



$4 - 2y^2 = -y^2$

$y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 2$

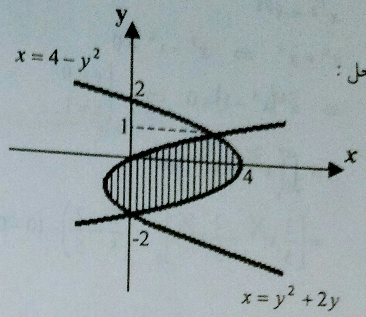
$A = \int_{-2}^{2} \left(4 - 2y^2 - \left(-y^2\right)\right) dy$

$= \int_{-2}^{2} \left(-y^2 + 4\right) dy = \left[\frac{-y^3}{3} + 4y\right]_{-2}^{2}$

$$=\left[\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=\frac{32}{3}$$

31) $x=y^2+2y \quad , \quad x=4-y^2$

حل :



$$y^2+2y=4-y^2 \quad \Rightarrow \quad 2y^2+2y-4=0$$

$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$A=\int_{-2}^{1}\left(4-y^2-y^2-2y\right)dy$$

$$=\int_{-2}^{1}\left(4-2y^2-2y\right)dy=\left[4y-\frac{2y^3}{3}-y^2\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(4-\frac{2}{3}-1\right)-\left(-8+\frac{16}{3}-4\right)=9$$

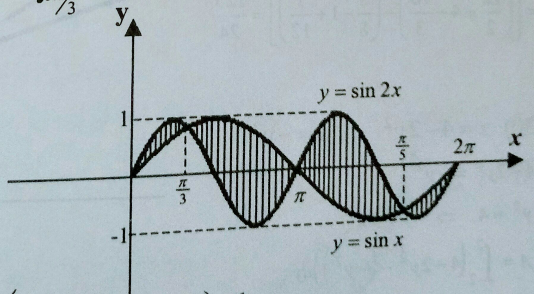
32) از برخورد منحنیهای $y=\sin 2x \quad , \quad y=\sin x$ بر بازهٔ $[0,2\pi]$ چهار ناحیه پدید می‌آیند . منحنیها را رسم کرده و مساحت A ی هر ناحیه را مشخص کنید .

حل :

$$\sin x=\sin 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos x=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3} \\ \sin x=0 \quad \Rightarrow \quad x=0,\pi \end{cases}$$

$$A=\int_0^{\pi/3}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\pi/3}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$+\int_{\pi}^{5\pi/3}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{5\pi/3}^{2\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$



$$A_1=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\pi/3}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$

$$A_2=\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\pi/3}^{\pi}=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4} \quad , A_3=A_2=\frac{7}{4} \quad , \quad A_4=A_1=\frac{1}{4}$$

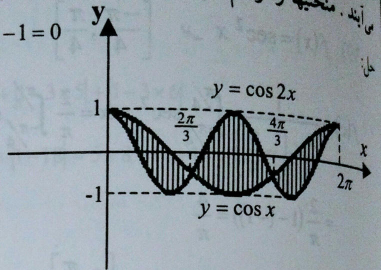
33) از برخورد منحنیهای $y=\cos 2x$, $y=\cos x$ بر بازهٔ $[0,2\pi]$ سه ناحیه پدید می‌آیند. منحنیها را رسم کرده و مساحت A ی هر ناحیه را مشخص کنید.

حل:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, 2\pi \\ x = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$



$$A_1 = \int_0^{2\pi/3} (\cos x - \cos 2x)dx = \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)\right) - (0-0) = \frac{3}{4}\sqrt{3}$$

$$A_2 = \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (\cos 2x - \cos x)dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x - \sin x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 2\sqrt{3}$$

$$A_3 = \int_{4\pi/3}^{2\pi} (\cos x - \cos 2x)dx = \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} = \left[(0-0) - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

❖ مقدار میانگین تابع داده شده را بیابید.

34) $f(x)=\sqrt{x}$ بر $[0,4]$

حل:
$$f(c) = \frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^4 x^{1/2}dx = \left[\frac{1}{4}\,\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \left[\frac{1}{6}(4)^{3/2} - 0\right] = \frac{4}{3}$$

35) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ بر $[-3,-1]$

حل:
$$f(c) = \frac{1}{-1-(-3)}\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}x^{-2}dx = \left[\frac{-1}{2x}\right]_{-3}^{-1} = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)\right) = \frac{1}{3}$$

36) $f(x)=\sin x$ بر $[0,\pi]$

حل:
$$f(c) = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi = \frac{1}{\pi}(-(-1)(-1)) = \frac{2}{\pi}$$

37) $f(x)=\cos x$ بر $[0,2\pi]$

حل:
$$f(c) = \frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}\cos x\,dx = \frac{1}{2\pi}[\sin x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(0-0) = 0$$

38) $f(x)=\sin^2 x$ بر $[0,2\pi]$

حل:
$$f(c) = \frac{1}{2\pi-0}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{4\pi}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi}\big[(2\pi-0)-(0-0)\big]=\frac{1}{2}$$

39) $f(x)=\sec^2 x$ بر $\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^2 x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^2 x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\tan x\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\big(1-(-1)\big)=\frac{4}{\pi}$$

40) $f(x)=\sec x\tan x$ بر $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\pi/3}\sec x\tan x\,dx=\frac{3}{\pi}\left[\sec x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{\pi}$$

41) فرض کنید F پاد مشتق f بر $[a,b]$ بوده، و $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

در این صورت:

$$\sum_{i=1}^{n}\big[F(x_i)-F(x_{i-1})\big]=F(b)-F(a) \qquad (\text{یک})$$

زیرا مجموع سمت چپ توی هم رواست . با استفاده از فرمول (یک) و قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات (قضیهٔ ۲ ، صفحهٔ ۲۵۸) ، قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را مستقیماً ثابت کنید .

حل :

$$f(x_i)-f(x_i-1)=f(p_i)\Delta x_i \qquad p_i\in[x_{i-1},x_i]$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}f(p_i)\Delta x_i=F(b)-F(a)$$

$$x_1=a<x_2<x_2<x_3\ldots<x_n=b$$

$$\Rightarrow \lim f(p_i)\Delta x_i=F(b)-F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

* عبارات زیر را حساب کنید .

1) $\sum_{n=2}^{6}|1-3n|$

حل :

$$\sum_{n=2}^{6}|1-3n| = |1-3\times2|+|1-3\times3|+|1-3\times4|+|1-3\times5|+|1-3\times6|$$

$$=|1-6|+|1-9|+|1-12|+|1-15|+|1-18| = 5+8+11+14+17=55$$

2) $\sum_{n=3}^{8}(n^2-2n)$

حل :

$$\sum_{\text{د}=3}^{8}(n^2-2n)=(3^2-2\times3)+(4^2-2\times4)+(5^2-2\times5)+(6^2-2\times6)$$

$$+(7^2-2\times7)+(8^2-2\times8)=3+8=15+24+35+48=133$$

3) $\sum_{n=0}^{4}\frac{1-n^2}{1+n^2}$

حل :

$$\sum_{n=0}^{4}\frac{1-n^2}{1+n^2}=\left(\frac{1-0^2}{1+0^2}\right)+\left(\frac{1-1^2}{1+1^2}\right)+\left(\frac{1-2^2}{1+2^2}\right)+\left(\frac{1-3^2}{1+3^2}\right)+\left(\frac{1-4^2}{1+4^2}\right)$$

$$=1+0+(\frac{-3}{5})+(\frac{-8}{10})+(\frac{-15}{17})=\frac{-109}{8}$$

4) $\sum_{n=1}^{7}\tan\frac{(2n-1)\pi}{4}$

حل :

$$\sum_{n=1}^{7}\tan\frac{(2n-1)\pi}{4}=\tan\frac{(2-1)\pi}{4}+\tan\frac{(2\times2-1)\pi}{4}+\tan\frac{(3\times2-1)\pi}{4}+\tan\frac{(4\times2-1)\pi}{4}$$

$$+\tan\frac{(6\times2-1)\pi}{4}+\tan\frac{(7\times2-1)\pi}{4}$$

$$=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{4}+\tan\frac{7\pi}{4}+\tan\frac{9\pi}{4}+\tan\frac{11\pi}{4}+\tan\frac{13\pi}{4}$$

$$=1-1+1-1+1-1+1=1$$

5) $\sum_{n=10}^{99}\frac{1}{n(n+1)}$

حل :

$$\sum_{n=10}^{99}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=10}^{99}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{99+1}\right)=\frac{9}{100}$$

مسائل صفحه ۴۳۹

6) $\sum_{n=1}^{49}(3n^2+3n+1)$

حل :

$$\sum_{n=1}^{49}(3n^2+3n+1)=\sum_{n=1}^{49}(n+1)^3-n^3=(49+1)^3-1^3=50^3-1=124999$$

7) دو تابع $G(x)=\begin{cases}x^2+1(x>0)\\x^2(x<0)\end{cases}$ و $F(x)=\begin{cases}x^2\,(x>0)\\x^2+1(x<0)\end{cases}$ دارای مشتق یکسان $2x$ اند ، ولی تفاوت آنها ثابت نیست چرا این قضیه ٤ ، صفحه ۳۹۸ ، را نقض نمی کند؟

حل : زیرا بازه این توابع متفاوت است

8) با استفاده از مشتق گیری ، نشان دهید که بر هر بازهٔ غیر شامل نقاط $x=\pm\frac{1}{x}\pi,\frac{3}{2}\pi,...$ داریم $\tan^2 x=\sec^2 x+C$. سپس ثابت C را بیابید .

حل :

$$\tan^2 x=\sec^2 x+c\xrightarrow{\text{مشتق میگریم}}2\tan x\sec x=2\sec x\tan x$$

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1\Rightarrow c=-1$$

❖ انتگرالهای زیر را حساب کنید .

9) $\int\left(3x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

حل :

$$\int\left(x^2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(3x^2-x^{-2}+x^{-3})dx$$

$$=\frac{3x^3}{3}-\frac{x^{-1}}{(-1)}+\frac{x^{-2}}{(-2)}+c=x^3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

10) $\int\frac{(x+2)^2}{x^4}dx$

حل :

$$\int\frac{(x+2)^2}{x^4}dx=\int\frac{x^2+4x+4}{x^4}dx=\int\left(\frac{x^2}{x^4}+\frac{4x}{x^4}+\frac{4}{x^4}\right)dx=\int(x^{-2}+4x^{-3}+4x^{-4})dx$$

$$=\frac{x^{-1}}{(-1)}+4\frac{x^{-2}}{(-2)}+4\frac{x^{-3}}{(-3)}+c=\frac{-1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{3x^3}+c$$

11) $\int\cos(\pi x+\sqrt{2})dx$

حل :

$$\int\cos(\pi x+\sqrt{2})dx=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+\sqrt{2})dx+c$$

12) $\int(1+\sec^2 3t)dt$

حل :

$$\int(1+\sec^2 3t)dt=t+\frac{1}{3}\tan 3t+c$$

13) $\int \frac{\cos 2u du}{\cos^2 u \sin^2 u}$

حل:

$$\int \frac{\cos 2u du}{\cos^2 u \sin^2 u} = \int \frac{\cos 2u}{\frac{1}{4}(4\cos^2 u \sin^2 u)} du = \int \frac{4\cos 2u}{(\sin 2u)^2} du$$

$$= \int \frac{\cos 2u}{\sin^2 2u} du = 4\int \cot 2u \csc 2u du = 4\times(\frac{-1}{2}\csc 2u) + c = -2\csc 2u + c$$

14) $\int \frac{(\sqrt{v}+1)^3}{\sqrt{v}} dv$

$$\int \frac{(\sqrt{v}+1)^3}{\sqrt{v}} dv = \int \frac{v\sqrt{v}+3\sqrt{v}+3v+1}{\sqrt{v}} dv = \int\left(v+3+3\sqrt{v}+\frac{1}{\sqrt{v}}\right)dv$$

$$= \int\left(v+3+3v^{1/2}+v^{-1/2}\right)dv = \frac{v^2}{2}+3v+3\left(\frac{2}{3}v^{3/2}\right)+2v^{1/2}+c = \frac{v^2}{2}+3v+2v^{3/2}+2v^{1/2}+c$$

15) $\int_1^2 \left(x-\frac{4}{x}\right)^2 dx$

حل:

$$\int_1^2 \left(x-\frac{4}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 (x^2-8+16x^{-2})dx = \left[\frac{x^3}{3}-8x-\frac{16}{x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-16-\frac{16}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-8-16\right) = \frac{7}{3}$$

16) $\int_{-1}^1 \left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$

حل:

$$\int_{-1}^1 \left(1-\sqrt[3]{x}\right)^3 dx = \int_{-1}^1\left(1-3\sqrt[3]{x}+3\sqrt[3]{x^2}-x\right)dx = \int_{-1}^1\left(1-3x^{1/3}+3x^{2/3}-x\right)dx$$

$$= \left[x-\frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 = \left(1-\frac{9}{4}+\frac{9}{5}-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{9}{4}-\frac{9}{5}-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$$

17) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx$

حل:

$\int_{-a}^{+a}$ تابع فرد $= 0 \Rightarrow \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x dx = 0$

18) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 t dt$

حل:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\tan^2 x + 1 - 1)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)dx = [\tan x - x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right)-\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=2-\frac{\pi}{2}$$

19) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cot^2 u\,du$

حل :

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cot^2 u\,du=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\cot^2 u+1-1)du=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(\csc^2 u-1)du=[-\cot u-u]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=\left(-\cot(\frac{3\pi}{4})-(\frac{3\pi}{4})\right)-\left(-\cot(\frac{\pi}{4})-(\frac{\pi}{4})\right)=2-\frac{\pi}{4}$$

20) $\int_{-1}^{1}\cos^2 v\tan v\,dv$

حل :

$$\int_{-1}^{1}\cos^2 v\tan v\,dv=\int_{-1}^{1}\cos^2 v\frac{\sin v}{\cos v}dv=\int_{-1}^{1}\cos v\sin dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2\sin v\cos v\,dv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin v\,dv=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2v\right]_{-1}^{1}=\left[-\frac{1}{4}\cos 2V\right]$$

$$=\left(-\frac{1}{4}\cos 2\right)-\left(-\frac{1}{4}\cos(-2)\right)=-\frac{1}{4}\cos 2+\frac{1}{4}\cos 2=0$$

21) **به ازای عدد صحیح $n\ge 0$ ، نشان دهید که**

$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}x^n\,dx=\begin{cases}1 & \text{اگر n زوج باشد}\\ 0 & \text{اگر n فرد باشد}\end{cases}$$

حل :

اگر n فرد باشد $\Rightarrow$ x^n فرد است $\Rightarrow$ $\int_{-1}^{1}x^n\,dx=0$

اگر nزوج باشد . $\Rightarrow$ $\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}x^n\,dx=\frac{n+1}{2}2\int_{0}^{1}x^n\,dx=(n+1)\int_{0}^{1}x^n\,dx=(n+1)\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{0}^{1}=1$

❖ **مقدار میانگین تابع زیر را بیابید .**

22) $f(x)=(1-x)^3$ بر $[-2,2]$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2}(1-x)^3\,dx=\left[+\frac{1}{4}\times(-1)\frac{(1-x)^4}{4}\right]_{-2}^{2}$$

$$\left[-\frac{1}{16}(1-x)^4\right]_{-2}^{2}=\left(-\frac{1}{16}+\frac{81}{16}\right)=5$$

23) $f(x)=(x+1)^{2/3}$ بر $[-1,7]$

حل :

$$f(x)=\frac{1}{7-(-1)}\int_{-1}^{7}(x+1)^{2/3}=\frac{1}{8}\left[\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}\right]_{-1}^{7}=\frac{1}{8}\left[\frac{96}{5}-0\right]=\frac{12}{5}$$

24) $f(x)=2\cos x-\sin$ بر $[0,\frac{\pi}{2}]$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\pi/2}(2\cos x-3\sin x)dx=\frac{2}{\pi}\left[2\sin x-3\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}((2+0)-(0+3))=-\frac{2}{\pi}$$

25) $f(x)=(\cos x-x)^2$ بر $[-\pi,\pi]$

حل :

$$f(c)=\frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos^2 x-2x\cos x+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{\pi+\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx-\int_{-\pi}^{\pi}x\cos xdx+\int_{-\pi}^{\pi}x^2\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$$

26) از فرمول $\int_0^1\left(x^2-x+1\right)dx=\frac{5}{6}$ نتیجه بگیرید که معادلهٔ درجه دوم $6x^2-6x+1$ ریشه ای بین 0 و 1 دارد . این را مستقیماً تحقیق کنید .

حل : طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها : $f(c)=\frac{1}{1-0}\int_0^1\left(x^2-x+1\right)dx \Rightarrow f(c)=\frac{5}{6}$

$$f(c)=c^2-c+1=\frac{5}{6} \Rightarrow 6c^2-6c+6=5 \Rightarrow 6c^2-6c+1=0$$

حال با توجه به اینکه از قضیهٔ مقدار میانگین $f(c)=\frac{5}{6}$ بدست آمد پس معادله $6x^2-6x+1=0$ ریشه ای برابر با مقدار $\frac{5}{6}$ دارد که داریم : $0<\frac{5}{6}<1$

27) قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها را ثابت کنید: فرض کنید f و g بر $[a,b]$ پیوسته بوده، و g بر $[a,b]$ تغییر علامت ندهد. در این صورت ،نقطه ای مانند c در $[a,b]$ هست به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

حل : هر گاه M و m ماکزیمم و مینیمم f بر $[a,b]$ بوده و g نامنفی باشد ، آنگاه $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$ می باشد سپس طبق قاعدهٔ شش صفحه ۳۷۸ داریم :

$$m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$$

لذا مقدار میانگین f بر $[a,b]$ ، که با h نموده می شود ، متعلق به بازهٔ $\left[m\int_a^b g(x)\ ,\ M\int_a^b g(x)\right]$

($\int_a^b g(x)dx$ نامنفی است) و از قضیهٔ مقدار میانی معلوم می شود که نقطه ای مانند c در بازهٔ $[a,b]$ وجود دارد که : $h=f(c)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

❖ **نقطه c صادق بر فرمول (یک) را در صورتی بیابید که**

28) $f(x)=x^2\quad ,\quad g(x)=x\quad ,a=0,\ b=2$

حل :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_0^2 x^2x\,dx=f(c)\int_0^2 x\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=f(c)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow 4=f(c)\times 2 \Rightarrow f(c)=2$$

29) $f(x)=x,g(x)=x^2-1\quad ,a=-1\ ,b=0$

حل :

$$\int_{-1}^0 x(x^2-1)dx = f(c)\int_{-1}^0 (x^2-1)dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)_{-1}^0 = f(c)\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{-1}^0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=f(c)\ \left(0-(-\frac{1}{3}-(-1)\right) \Rightarrow f(c)=\frac{9}{8}$$

30) $f(x)-\cos x\ ,\ g(x)=\sin x\quad a=\pi\ ,\ b=\frac{3\pi}{2}$

حل:

$$\int_\pi^{3\pi/2}\sin x\cos x\ dx=f(c)\int_\pi^{3\pi/2}\sin dx=\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_\pi^{\frac{3\pi}{2}}=f(c)(-\cos)_\pi^{3\pi/2}$$

$$\Rightarrow \left(+\frac{1}{4}-(-\frac{1}{4})\right)=f(c)(0-(+1)) \Rightarrow f(c)=-\frac{1}{2}$$

31) $f(x)=\sin x\ ,\ g(x)=\cos x\ ,a=0\ ,b=\frac{\pi}{2}$

حل :

$$\left[-\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=f(c)[\sin]_0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=f(c)(1-0) \Rightarrow f(c)=\frac{1}{2}$$